

FUNCIONAMIENTO DINAMICO DE LÍNEAS

Introducción

El objetivo de este capítulo es definir los modelos básicos de líneas en base a los cuales es posible calcular las tensiones, corrientes, y potencias en distintos puntos de un sistema interconectado a partir de valores conocidos en otros puntos. Con tal finalidad y pensando exclusivamente en las líneas, haremos una clasificación de acuerdo a la longitud de las mismas y formularemos las ecuaciones que definen los modelos mencionados.

Representación de las líneas de transmisión

Normalmente las líneas funcionan con cargas equilibradas y aunque no estén diseñadas simétricamente o no tengan trasposiciones, se pueden considerar equilibradas y por ende supondremos las fases equilibradas.

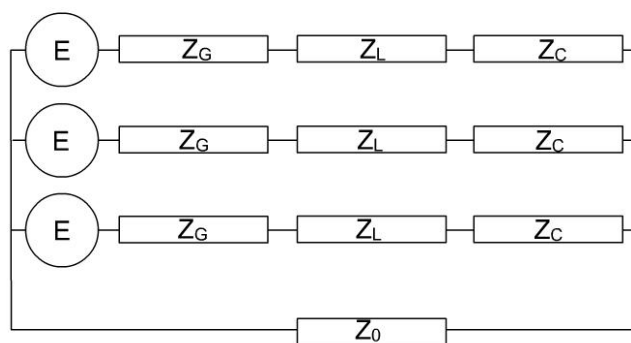


Fig. 1

La Fig.1 representa un sistema de potencia elemental, compuesto por un generador trifásico con sus respectivas impedancias por fase Z_G , una línea trifásica con sus impedancias serie Z_L y una carga conectada en estrella con sus impedancias Z_C . Hemos supuesto un neutro con impedancia Z_0 .

Si la carga es equilibrada, no circulará corriente por el neutro y por lo tanto los centros de estrella del generador y la carga estarán al mismo potencial y en consecuencia podrá suprimirse el neutro.

Estas consideraciones nos permiten asegurar que el estudio de un sistema de potencia, podrá hacerse sobre una de las fases y posteriormente extender los resultados a las otras dos. Esto es válido dentro de ciertos límites ya que por ejemplo en el caso de fenómenos transitorios el comportamiento de las tres fases puede ser distinto.

La Fig.2 representa el circuito monofásico equivalente al sistema trifásico, donde el conductor de retorno; al que llamaremos barra de referencia; simboliza al neutro.

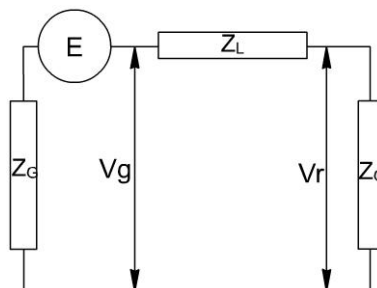


Fig. 2

Debemos reiterar que ese conductor si bien nos permite estudiar el sistema, en realidad no conduce corriente y por ende no se lo instala.

De los cuatro parámetros de líneas estudiados (R, L, C, G), la conductancia G normalmente no se la toma en cuenta en los estudios dinámicos normales, en los que interesa calcular niveles de tensión, corrientes y potencias. Por lo tanto al sistema elemental representado en la Fig.2 deberíamos agregarle la capacidad.

Clasificación de las líneas según su longitud

Las líneas de transmisión de energía que funcionan en 50 o 60 Hz se pueden clasificar en función de su longitud, en **cortas, medias o largas**. Las primeras son aquellas de hasta 80 km de longitud; las segundas están comprendidas entre 80 y 240 km y las largas son de más de 240 km. La clasificación se hace a los efectos de definir el modelo que la representará.

Las líneas cortas se representan con un modelo R-L, las medias mediante un modelo R-L-C con parámetros concentrados y las largas con un modelo R-L-C con parámetros distribuidos.

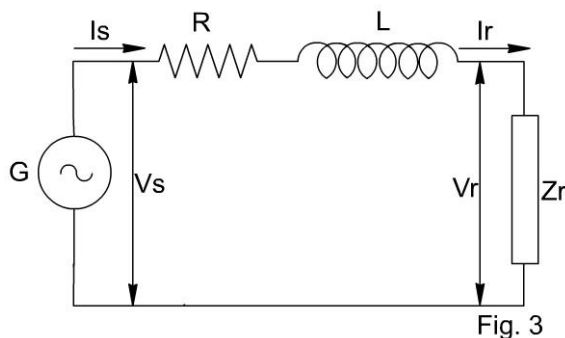
Como veremos posteriormente, esta clasificación en líneas cortas, medias o largas está condicionada a la frecuencia a que trabaje.

Líneas cortas

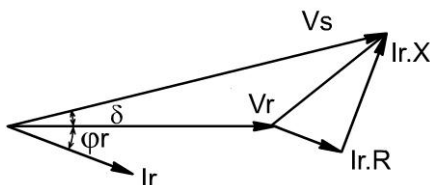
El modelo de estas líneas, tal como se dijo en el párrafo anterior estará representado por una impedancia serie R-L como podemos observar en la Fig.3 . Las ecuaciones matemáticas que representan al modelo son las siguientes:

$$\begin{aligned} I_s &= I_r \\ V_s &= V_r + I_r \cdot Z \quad (1) \end{aligned}$$

Donde: V_r e I_r son las tensiones y corrientes en el extremo receptor V_s e I_s son las tensiones y corrientes en el extremo transmisor



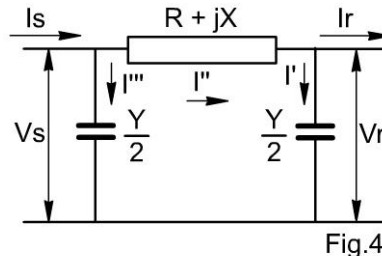
El siguiente diagrama vectorial muestra el funcionamiento del sistema, donde podemos observar que de acuerdo al tipo de carga la tensión del lado generador será mayor o menor que la tensión del lado de la carga. Para cargas fuertemente inductivas $V_s > V_r$ y para cargas fuertemente capacitivas $V_s < V_r$.



El ángulo δ entre las tensiones en los extremos transmisor y receptor es lo que se conoce como ángulo de potencia y su valor nos da una idea de la potencia que se está transmitiendo.

Líneas medias

El modelo representativo de las líneas medias es el representado en la Fig. 4

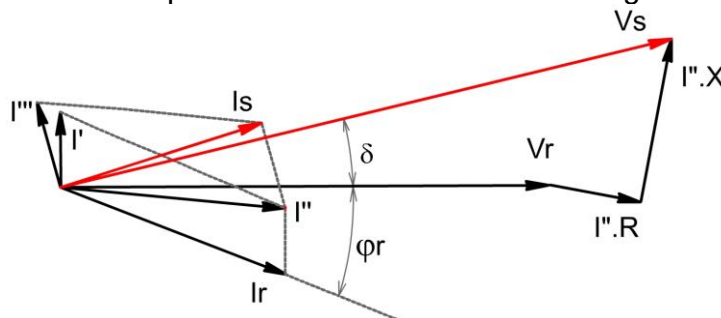


Las ecuaciones que resuelven este modelo son las siguientes:

$$V_s = V_r + (I_r + I'') \cdot Z = V_r + (I_r + V_r \cdot \frac{Y}{2}) \cdot Z \quad (3)$$

$$I_s = I_r + V_r \cdot \frac{Y}{2} + V_s \cdot \frac{Y}{2}$$

El diagrama vectorial correspondiente a este modelo es el siguiente:



Observando el diagrama vectorial vemos que el desfase entre V_s e I_s ha cambiado de forma tal que la carga vista desde el extremo transmisor tiene carácter capacitiva siendo que la carga real I_r es inductiva. Esto se debe a las cargas capacitivas $\frac{Y}{2}$ introducidas por la línea.

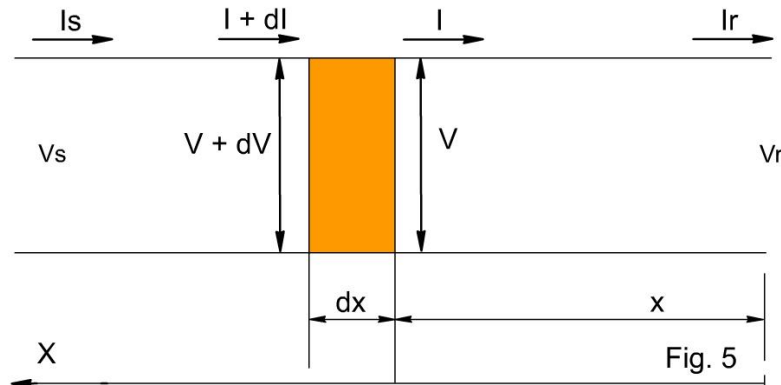
De igual forma podríamos observar que de acuerdo a la relación de valores de la carga real y las admitancias de la línea $\frac{Y}{2}$; nos encontraríamos que para el caso en que $I_r = 0$, la tensión V_r sería mayor que V_s . Este fenómeno se conoce como **Efecto Ferranti**.

Líneas largas

Para analizar estas líneas debemos recurrir al análisis de un modelo diferencial y luego extender por integración los resultados a lo largo de toda la línea.

Debemos aclarar que la integración que haremos será en función de la distancia al punto de referencia que será el extremo receptor, y no consideraremos la variable tiempo.

Consideremos el modelo representado en la Fig. 5



La Fig. 5 nos muestra un elemento diferencial de línea en el que debemos suponer que existen parámetros diferenciales de resistencia, capacidad e inductancia. La capacidad diferencial estará en paralelo y el conjunto $r + j\omega l$ estará en serie. En principio despreciamos la conductancia paralelo no obstante en otro tipo de estudios debería ser considerada.

A partir de lo antedicho, podemos plantear las siguientes ecuaciones:

$$dV = I \cdot z \cdot dx \Rightarrow \frac{dV}{dx} = I \cdot z \quad (4)$$

$$dI = V \cdot y \cdot dx \Rightarrow \frac{dI}{dx} = V \cdot y$$

En las ecuaciones anteriores z e y son las impedancias y admitancias por unidad de longitud. Por lo tanto los productos $(z \cdot dx)$ y $(y \cdot dx)$ representan la impedancia y admitancia del elemento diferencial dx .

Derivando ambas ecuaciones respecto a x , obtendremos dos ecuaciones diferenciales de segundo orden cuyas soluciones nos darán los valores de V e I en función de x .

$$\frac{d^2V}{dx^2} = z \cdot \frac{dI}{dx} \quad (5)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = y \cdot \frac{dV}{dx}$$

Reemplazando $\frac{dI}{dx}$ y $\frac{dV}{dx}$ resultan las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = y \cdot z \cdot V \quad (6)$$

$$\frac{d^2I}{dx^2} = y \cdot z \cdot I$$

Las soluciones de estas ecuaciones se obtienen ensayando soluciones de tipo exponencial de la forma:

$$V = A \cdot e^{\gamma \cdot x} \quad (7)$$

Donde: x es la longitud de la línea desde el extremo receptor (ver fig.5)

Derivando dos veces esta expresión resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= A \cdot \gamma \cdot e^{\gamma \cdot x} \\ \frac{d^2V}{dx^2} &= A \cdot \gamma^2 \cdot e^{\gamma \cdot x} \end{aligned} \quad (8)$$

Igualando ambas expresiones de la derivada segunda resulta:

$$\begin{aligned} A \cdot \gamma^2 \cdot e^{\gamma \cdot x} &= y \cdot z \cdot V \\ A \cdot \gamma^2 \cdot e^{\gamma \cdot x} &= y \cdot z \cdot A \cdot e^{\gamma \cdot x} \\ \therefore \gamma &= \pm \sqrt{z \cdot y} \end{aligned} \quad (9)$$

La solución general que nos permite obtener la tensión a lo largo de la línea será:

$$\begin{aligned} V &= A1 \cdot e^{\gamma \cdot x} + A2 \cdot e^{-\gamma \cdot x} \\ V &= A1 \cdot e^{\sqrt{z \cdot y} \cdot x} + A2 \cdot e^{-\sqrt{z \cdot y} \cdot x} \end{aligned} \quad (10)$$

Derivando V respecto a x e igualando al producto I · z tal como muestra la ecuación (4), resulta:

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{z \cdot y}}{z} \cdot A1 \cdot e^{\sqrt{z \cdot y} \cdot x} - A2 \cdot \frac{\sqrt{z \cdot y}}{z} \cdot e^{-\sqrt{z \cdot y} \cdot x} \\ I &= \frac{1}{\sqrt{\frac{z}{y}}} \cdot A1 \cdot e^{\sqrt{z \cdot y} \cdot x} - A2 \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{z}{y}}} \cdot A2 \cdot e^{-\sqrt{z \cdot y} \cdot x} \end{aligned} \quad (11)$$

Para determinar los valores de A1 y A2, planteamos con las (10) y (11) un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas a las que les fijamos las condiciones de borde para los extremos receptor y transmisor; es decir: para x = 0 V = Vr e I = Ir resultando el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} V_R &= A1 + A2 \\ I_R &= \frac{1}{\sqrt{\frac{z}{y}}} \cdot (A1 - A2) \end{aligned} \quad (12)$$

Llamando a la raíz de z/y con el nombre de impedancia característica de la línea resultan los siguientes valores de A1 y A2:

$$A1 = \frac{V_R + I_R \cdot Z_0}{2}; A2 = \frac{V_R - I_R \cdot Z_0}{2} \quad (13)$$

Reemplazando los valores de A1 y A2 obtenidos en las ecuaciones (10) y (11), obtenemos las soluciones finales de V e I en función de x; es decir los valores de tensión y corriente en cada punto de la línea.

$$V = \frac{V_R + I_R \cdot Z_0}{2} \cdot e^{\gamma \cdot x} + \frac{V_R - I_R \cdot Z_0}{2} \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

$$I = \frac{\frac{V_R}{Z_0} + I_R}{2} \cdot e^{\gamma \cdot x} - \frac{\frac{V_R}{Z_0} - I_R}{2} \cdot e^{-\gamma \cdot x} \quad (14)$$

Veamos a continuación cual es la interpretación de las ecuaciones (14)

$\gamma = \alpha + j \cdot \beta \Rightarrow$ Es un complejo donde la parte real se la conoce como constante de atenuación y la parte imaginaria se la conoce como constante de fase.

$Z_0 \Rightarrow$ Es la impedancia característica de la línea y es un número complejo

Reemplazando la constante de propagación γ por sus partes reales e imaginaria resultan las siguientes ecuaciones:

$$V = \frac{V_R + I_R \cdot Z_0}{2} \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot e^{j\beta x} + \frac{V_R - I_R \cdot Z_0}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x}$$

$$I = \frac{\frac{V_R}{Z_0} + I_R}{2} \cdot e^{\alpha x} \cdot e^{j\beta x} - \frac{\frac{V_R}{Z_0} - I_R}{2} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{-j\beta x} \quad (15)$$

Observando ambas ecuaciones vemos que su estructura es similar a la ecuación de la cuerda vibrante, la cual consta de dos términos. Uno que crece en módulo a medida que nos acercamos al extremo transmisor es decir a medida que x se hace más grande y otro término que crece a medida que nos acercamos al extremo receptor es decir para pequeños valores de x. Por este hecho al primer término se lo denomina onda incidente y al segundo término onda reflejada.

$e^{\alpha x}$: La exponencial real nos indica en que medida varía el módulo de la onda incidente o la reflejada con respecto al valor de referencia del extremo receptor.

$e^{j\beta x}$: En forma similar la exponencial imaginaria nos indica como se desfasa la onda incidente o la reflejada respecto a la onda de referencia tomada en el extremo receptor.

V_r = Es la tensión en el extremo receptor

I_r = Es la corriente en el extremo receptor

Z_0 = Es la impedancia característica de la línea y su nombre es debido al hecho de que su valor depende de las características geométricas de la línea.

Si cargamos a una línea con una impedancia igual a la impedancia característica de la línea no existirá onda reflejada. En este caso las expresiones de corriente y tensión quedan reducidas en la siguiente forma:

$$V = \frac{V_R + I_R \cdot Z_0}{2} \cdot e^{\gamma x} = \frac{2 \cdot V_R}{2} e^{\gamma x} = V_R e^{\gamma x}$$

$$I = \frac{\frac{V_R}{Z_0} + I_R}{2} \cdot e^{\gamma x} = \frac{2 \cdot I_R}{2} \cdot e^{\gamma x} = I_R e^{\gamma x} \quad (16)$$

Observando las expresiones (16) podemos concluir que la tensión y la corriente en cualquier punto de la línea mantienen el mismo defasaje que V_r e I_r . En otras palabras; cuando cargamos a una línea con la impedancia característica el $\cos \varphi$ a lo largo de la línea se mantiene constante.

Veamos también que sucede con el rendimiento de la transmisión en esta condición de carga. Para ello analicemos la expresión del rendimiento de la transmisión:

$$\eta = \frac{W_R}{W_S} = \frac{\text{Potencia activa en el extremo receptor}}{\text{Potencia activa en el extremo transmisor}} = \frac{R_E (V_R \cdot I_R^*)}{R_E (V_S \cdot I_S^*)}$$

$$I_R^* = \text{Conjugado de } I_R \quad (17)$$

$$I_S^* = \text{Conjugado de } I_S$$

Cuando $Z_L = Z_0$ y a partir de las expresiones (16) obtendremos:

$$V_S = V_R \cdot e^{\gamma \cdot x} \quad \text{También} \quad V_R = V_S \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

$$I_S = I_R \cdot e^{\gamma \cdot x} \quad \text{También} \quad I_R = I_S \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

Si además suponemos que la línea no tiene pérdidas, es decir que $r=0$ y $g=0$ tendremos:

$$\gamma = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(r + jx) \cdot (g + jb)} = \sqrt{j^2 \cdot x \cdot b} = j\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} = \alpha + j\beta \therefore \alpha = 0$$

$$\therefore \beta = \omega \cdot \sqrt{L \cdot C}$$

Remplazando en la expresión del rendimiento η , resulta:

$$\eta = \frac{\text{Re}[V_S \cdot e^{-\gamma \cdot x} \cdot I_S^* \cdot (e^{-\gamma \cdot x})^*]}{\text{Re}[V_S \cdot I_S^*]} = \frac{\text{Re}[V_S \cdot e^{-j\beta \cdot x} \cdot I_S^* \cdot (e^{-j\beta \cdot x})^*]}{\text{Re}(V_S \cdot I_S^*)} = \text{Re}(e^{-j\beta \cdot x} \cdot e^{j\beta \cdot x}) = \text{Re}(e^0) = 1$$

Veamos ahora el rendimiento cuando la línea está transmitiendo la potencia natural pero con

$r \neq 0 - y - g \neq 0$

$$\eta = \frac{\text{Re}[V_S \cdot e^{-\gamma \cdot x} \cdot I_S^* \cdot (e^{-\gamma \cdot x})^*]}{\text{Re}(V_S \cdot I_S^*)} = \frac{\text{Re}[V_S \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{-j\beta \cdot x} \cdot I_S^* \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j\beta \cdot x}]}{\text{Re}(V_S \cdot I_S^*)} = e^{-2 \cdot \alpha \cdot x} = \eta_{\max}$$

La expresión anterior nos muestra que en este caso el rendimiento no es 1 como en el caso de la línea ideal, pero su valor será el máximo y depende de la longitud de la línea y de la constante de atenuación α .

Si la longitud de la línea real tiende a infinito el rendimiento tiende a cero.

$$\eta = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2 \cdot \alpha \cdot x} = 0$$

Para líneas reales, se puede demostrar que la constante de amortiguación α en función de la frecuencia varía dentro de los siguientes límites:

Para frecuencias tendiendo a cero resulta: $\alpha_{\min} = \sqrt{r \cdot g}$ (ver Anexo 1)

Para frecuencias tendiendo a infinito: $\alpha_{\max} = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{g}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$

En consecuencia el rendimiento, para líneas de transmisión de energía donde $\omega \rightarrow 0$ ($f = 50\text{Hz}$), queda definido por la constante de amortiguación $\alpha \rightarrow \alpha_{\min}$.

La consideración de $\omega=0$ para $f=50\text{Hz}$ surge de observar el gráfico de $\alpha = f(\omega)$ inserto en el anexo.

Por lo tanto:

$$\eta = e^{2 \cdot \sqrt{r \cdot g} \cdot x}$$

Ejemplo:

Supongamos una línea de 132 kV real, que está transmitiendo la potencia natural,

cuyos parámetros son: $L = 250 \text{ km}$, $r = 0,056 \frac{\Omega}{\text{km}}$ (Cobre 300 mm^2), $g = 5 \cdot 10^{-7} \frac{\Omega^{-1}}{\text{km}}$

Este valor de la conductancia g se corresponde con una pérdida por efecto corona y adicionales excepto las pérdidas joule, del orden de $10 \frac{\text{kw}}{\text{km}}$ $\left(g = \frac{P}{U^2} \right)$

Remplazando en la anterior resulta: $\eta = e^{-2 \cdot \sqrt{0,0565 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} \cdot 250} = 0,9197$

El valor obtenido obedece a las altas pérdidas corona y adicionales supuestas, cosa que podría ocurrir con mal tiempo. En condiciones de buen tiempo las pérdidas corona y adicionales para este nivel de tensión, son del orden de $0,5 \text{ kW/km}$, con lo que el rendimiento resultaría:

$$g = \frac{P}{U^2} = \frac{0,5 \text{ kw}}{132^2 \text{ kV}^2} = 2,869 \cdot 10^{-8} \frac{\Omega^{-1}}{\text{km}} \therefore \eta = e^{-2 \cdot \sqrt{0,056 \cdot 2,869 \cdot 10^{-8}} \cdot 250} = 0,98$$

Longitud de onda y velocidad de propagación

Al hacer la interpretación de las partes real e imaginaria de la contante de propagación γ , vimos que la parte imaginaria β nos indicaba el desfase entre la tensión de referencia en el extremo receptor V_r y la tensión en el punto considerado. Cuando este desfase vale 360° (2π), se dice que hemos recorrido una distancia de una longitud de onda. Por lo tanto la longitud de onda valdrá:

$$\lambda = \frac{2 \cdot \pi}{\beta}$$

Para una línea ideal sin pérdidas será: $\beta = j\omega\sqrt{LC} \therefore \lambda = \frac{2 \cdot \pi}{2\pi f \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{f \sqrt{L \cdot C}}$

A su vez la velocidad de propagación valdrá:

$$V_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Vemos que la velocidad de propagación en una línea ideal depende de producto $L \cdot C$. En líneas reales dependerá también de la constante dieléctrica del medio que rodea al conductor.

En líneas de transmisión de energía el producto $L \cdot C$ es prácticamente una constante e independiente del nivel de tensión. Se asume que en líneas de transmisión la V_p es prácticamente la velocidad de la luz $\left(300\,000 \frac{\text{km}}{\text{seg}}\right)$

Por lo tanto para la frecuencia usual en gran parte de Europa y en Argentina $f = 50\text{Hz}$, la longitud de onda valdrá:

$$\lambda = \frac{V_p}{f} = \frac{300\,000 \frac{\text{km}}{\text{seg}}}{50 \frac{1}{\text{seg}}} = 6\,000 \text{ km}$$

Por lo tanto cuando hablamos de líneas largas, nos estamos refiriendo indirectamente a una longitud en Km que guarda una relación con la longitud de onda para dicha frecuencia. En otras palabras, para hablar de líneas cortas o largas debemos hacer referencia a la frecuencia a la que operará dicha línea.

De acuerdo a la clasificación de las líneas según su longitud, vimos que para longitudes mayores a los 240 km las llamamos largas, esto significa en consecuencia que para longitudes del orden de las veinticinco avas partes de la longitud de onda la línea se considera larga.

En esta línea de razonamiento podríamos ver que para una frecuencia de 1 MHz, donde la longitud de onda vale:

$$\lambda = \frac{300\,000 \frac{\text{km}}{\text{seg}}}{1\,000\,000 - \frac{1}{\text{seg}}} = 0,3 \text{ Km} = 300 \text{ m}$$

Una línea de una longitud de 12 m o más sería una línea larga.

Forma hiperbólica de la ecuación de las líneas largas

A partir de las ecuaciones (14) y de las definiciones de funciones hiperbólicas, podemos escribir las ecuaciones exponenciales de las líneas largas en forma de ecuaciones hiperbólicas.

$$\text{Sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2} \quad \text{Ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

$$V_x = V_r \cdot \text{Ch}\gamma x + I_r \cdot Z_0 \cdot \text{Sh}\gamma x$$

$$I_x = I_r \cdot \text{Ch}\gamma x + \frac{V_r}{Z_0} \cdot \text{Sh}\gamma x \quad (18)$$

Para encontrar la tensión y la corriente en el extremo generador hacemos $x = l$, siendo l la longitud de la línea.

También podemos encontrar las tensiones y corrientes en el extremo receptor a partir de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} V_r &= V_s \cdot \text{Ch}\gamma l - I_s \cdot Z_0 \cdot \text{Sh}\gamma l \\ I_r &= I_s \cdot \text{Ch}\gamma l - \frac{V_s}{Z_0} \cdot \text{Sh}\gamma l \end{aligned} \quad (19)$$

Las expresiones (19) son las fundamentales de una línea, en las que las tensiones son las de fase y las corrientes son las de línea (Para un sistema equilibrado).

Las funciones hiperbólicas (19) son las correspondientes a variables complejas y para su determinación puede recurrirse a desarrollos en serie o aplicando propiedades de las funciones hiperbólicas tal como se indica a continuación:

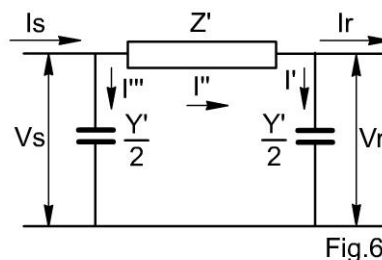
$$\begin{aligned} \text{Ch}\theta &= 1 + \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{\theta^6}{6!} + \dots \\ \text{Sh}\theta &= \theta + \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \frac{\theta^7}{7!} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{Ch}(\alpha + j\beta l) = \text{Ch}\alpha l \cdot \cos\beta l + j\text{Sh}\alpha l \cdot \sin\beta l$$

$$\text{Sh}(\alpha + j\beta l) = \text{Sh}\alpha l \cdot \cos\beta l + j\text{Ch}\alpha l \cdot \sin\beta l$$

Circuito equivalente de una línea larga

Los esquemas representativos de las líneas T o en π en los que se concentran los parámetros (Inductancia, resistencias o capacidades), no representan adecuadamente una línea larga, y debe recurrirse en tales casos a las expresiones de las líneas largas o en su defecto recurrir a un modelo que se denomina equivalente. Puntualmente analizaremos el circuito equivalente en π de una línea larga.



(Cuadripolo equivalente)

Aquí llamaremos Z' a la rama serie e $\frac{Y'}{2}$ a cada una de las ramas paralelo, para diferenciarlas del cuadripolo nominal con el que representamos a las líneas medias. Vamos a justificar las diferencias que existen entre los valores de la rama serie y las paralelas de ambos cuadripolos, de lo que resultarán factores de corrección con los cuales afectaremos a los cuadripolos nominales para obtener los equivalentes.

Partiremos de las ecuaciones de los cuadripolos a partir de los parámetros Z e Y, aplicados al cuadripolo de la Fig. 6.

$$V_s = \left(\frac{Z' \cdot Y'}{2} + 1 \right) \cdot V_r + Z' \cdot I_r \quad (20)$$

Comparando la expresión (20) con la (18), podemos observar que los coeficientes de V_r e I_r deben ser iguales. En principio igualaremos los coeficientes de I_r , de lo que surgen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} Z' &= Z_0 \cdot \text{Sh}_{\gamma l} \\ Z' &= \sqrt{\frac{Z}{Y}} \cdot \text{Sh}_{\gamma l} = z \cdot l \cdot \frac{\text{Sh}_{\gamma l}}{\sqrt{zy} \cdot l} = Z \cdot \frac{\text{Sh}_{\gamma l}}{\gamma l} \quad (21) \\ Z &= z \cdot l \end{aligned}$$

La expresión de Z' nos muestra que el factor $\frac{\text{Sh}_{\gamma l}}{\gamma l}$ es el factor de corrección por el cual hay que multiplicar a Z (del cuadripolo nominal) para obtener el Z' del cuadripolo equivalente.

Para líneas de mediana longitud, el factor de corrección tiende a la unidad, lo cual demostraría que para este tipo de líneas es indistinto usar el cuadripolo nominal o el equivalente.

Para determinar los factores de corrección de los ramales en paralelo, igualaremos los coeficientes de V_r , resultando las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \frac{Z' \cdot Y'}{2} + 1 &= \text{Ch}_{\gamma l} \\ \text{y como } Z' &= Z_0 \cdot \text{Sh}_{\gamma l} \\ \therefore \frac{Y' \cdot Z_0 \cdot \text{Sh}_{\gamma l}}{2} + 1 &= \text{Ch}_{\gamma l} \quad (22) \\ \therefore \frac{Y'}{2} &= \frac{1}{Z_0} \cdot \frac{\text{Ch}_{\gamma l} - 1}{\text{Sh}_{\gamma l}} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\text{Th} \frac{\lambda l}{2} = \frac{\text{Ch}_{\gamma l} - 1}{\text{Sh}_{\gamma l}} - \text{además - por - definición - } \text{Th} \theta = \frac{\text{Sh} \theta}{\text{Ch} \theta} \quad (23)$$

reemplazando, resulta:

$$\frac{Y'}{2} = \frac{1}{Z_0} \cdot \text{Th} \frac{\gamma l}{2} = \frac{Y}{2} \cdot \frac{\text{Th} \frac{\gamma l}{2}}{\frac{\gamma l}{2}} \quad (24)$$

La expresión de $\frac{Y'}{2}$ nos muestra que el factor $\frac{\text{Th} \frac{\lambda l}{2}}{\frac{\lambda l}{2}}$ es el factor por el cual hay que

multiplicar a $\frac{Y}{2}$ para obtener $\frac{Y'}{2}$ del cuadripolo equivalente.

De igual forma que en el ramal serie, este factor tiende a la unidad cuando se trata de líneas de mediana longitud.

Impedancia de entrada de líneas

Dividiendo miembro a miembro las expresiones (18) de V_x e I_x , resulta:

$$Z_i = \frac{V_x}{I_x} = \frac{V_r \cdot \text{Ch} \gamma x + I_r \cdot Z_0 \cdot \text{Sh} \gamma x}{I_r \cdot \text{Ch} \gamma x + \frac{V_r}{Z_0} \cdot \text{Sh} \gamma x}$$

Multiplicando y dividiendo por Z_0 resulta (25)

$$Z_i = \frac{V_r \cdot Z_0 \cdot \text{Ch} \gamma x + I_r \cdot Z_0^2 \cdot \text{Sh} \gamma x}{I_r \cdot Z_0 \cdot \text{Ch} \gamma x + V_r \cdot \text{Sh} \gamma x}$$

Dividiendo numerador y denominador de la (25) por $I_r \cdot \text{Ch} \gamma x$ y operando resulta:

$$Z_i = \frac{\frac{V_r \cdot Z_0 \cdot \text{Ch} \gamma x}{I_r \cdot \text{Ch} \gamma x} + \frac{I_r \cdot Z_0^2 \cdot \text{Sh} \gamma x}{I_r \cdot \text{Ch} \gamma x}}{\frac{I_r \cdot Z_0 \cdot \text{Ch} \gamma x}{I_r \cdot \text{Ch} \gamma x} + \frac{V_r \cdot \text{Sh} \gamma x}{I_r \cdot \text{Ch} \gamma x}} = \frac{Z_r \cdot Z_0 + Z_0^2 \cdot \text{Th} \gamma x}{Z_0 + Z_r \cdot \text{Th} \gamma x} \quad (26)$$

Planteando como condiciones de borde que el extremo receptor este en vacío ($Z_r = \infty$) o en corto ($Z_r = 0$), resultan las siguientes expresiones para la impedancia de entrada:

$$Z_i / \text{vacío} = Z_0 \cdot \text{Cth} \gamma x$$

$$\text{Si } Z_r = 0 \text{ (Corto)} \quad (27)$$

$$Z_i / \text{corto} = Z_0 \cdot \frac{Z_0 \cdot \text{Th} \gamma x}{Z_0} = Z_0 \cdot \text{Th} \gamma x$$

Multiplicando miembro a miembro las expresiones de ($Z_i / \text{vacío}$) y (Z_i / corto), resulta:

$$\begin{aligned} (Z_i / \text{vacío}) \cdot (Z_i / \text{corto}) &= Z_0^2 \cdot \text{Cth} \gamma x \cdot \text{Th} \gamma x \\ \therefore Z_0 &= \sqrt{(Z_i / \text{vacío}) \cdot (Z_i / \text{corto})} \end{aligned} \quad (28)$$

Esta expresión nos sugiere un método para medir la impedancia característica de las líneas mediante un par de ensayos (Vacío y corto).

Líneas de $\frac{1}{4}$ de longitud de onda

Estas líneas, por su longitud no son utilizadas en la transmisión de energía eléctrica, no obstante las estudiaremos para entender algunos fenómenos conocidos para los estudiosos de las líneas de transmisión de datos.

En primer término analizaremos el caso de las líneas sin pérdidas, para las cuales se supone que $g = 0$ y $r = 0$

Analizaremos puntualmente el comportamiento de la impedancia de entrada para las condiciones de vacío y corto.

Recordando que

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{Z \cdot Y} = \sqrt{(r + jx) \cdot (g + jb)}$$

Si $r = 0$ y $g = 0$ – resulta: (29)

$$\gamma = \sqrt{j\omega L \cdot j\omega C} = j\omega \cdot \sqrt{L \cdot C} = j\beta$$

Además si la línea tiene una longitud de $\frac{1}{4}$ de longitud de onda, es decir:

$$l = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\pi}{\omega \cdot \sqrt{L \cdot C}} \quad (30)$$

Luego γl en este caso particular valdrá:

$$\gamma l = (j\omega \sqrt{L \cdot C}) \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega \cdot \sqrt{L \cdot C}} \right) = j \frac{\pi}{2} \quad (31)$$

Los valores de la impedancia de entrada para las condiciones de vacío y corto del extremo receptor resultarán:

$$Z_i / \text{vacío} = Z_0 \cdot \frac{\text{Ch } \gamma l}{\text{Sh } \gamma l} = Z_0 \cdot \frac{e^{j2 \cdot \pi} + e^{-j2\pi}}{e^{j\pi/2} - e^{-j\pi/2}} = 0 \quad (32)$$

La expresión anterior nos indica que en el caso de una línea de un cuarto de longitud de onda, cuando el extremo receptor esta en vacío, la impedancia vista desde el extremo transmisor es nula, es decir se ve un corto circuito.

La explicación del fenómeno surge de observar que estamos en presencia de un circuito resonante serie (Recordemos que en un circuito R,L,C serie cuando resuena la impedancia queda limitada a R, y si $R=0$ la impedancia se anula)

Para el caso en que el extremo receptor este en corto:

$$Z_i / \text{corto} = Z_0 \cdot \frac{\text{Sh } \gamma l}{\text{Ch } \gamma l} = Z_0 \cdot \frac{(e^{j\frac{\pi}{2}} - e^{-j\frac{\pi}{2}})}{e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{\pi}{2}}} = jZ_0 \cdot \frac{1}{0} = \infty \quad (33)$$

En este caso se da el fenómeno opuesto al anterior, es decir frente a un corto en el extremo receptor, se tiene una impedancia de entrada infinita.

En este caso el fenómeno se explica observando que estamos frente a un circuito resonante paralelo.

Si realizáramos un análisis semejante al anterior para líneas de media longitud de onda, se demostraría fácilmente que en este caso se replica como impedancia de entrada la impedancia de carga es decir en vacío veríamos una impedancia de entrada infinita y en corto una impedancia de entrada nula.

Anexo 1**Análisis del valor de la constante de propagación y para líneas reales**

En este caso: $r \neq 0 - g \neq 0$

$$\gamma = \sqrt{z \cdot y} = \sqrt{(r + jx) \cdot (g + jb)} = \alpha + j\beta = \sqrt{(rg - xb) + j(rb + xg)}$$

Llamando $a = rg - xb$ y $b = rb + xg$

$$\therefore \gamma = \sqrt{a + jb}$$

Para resolver la raíz del complejo

$$z = a + jb = \rho \cdot (\cos\alpha + j\sin\alpha)$$

$$\text{Donde: } \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot y \cdot \alpha = \text{Tg}^{-1} \frac{b}{a}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0.5(1 + \cos\alpha)} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0.5(1 - \cos\alpha)}$$

$$\therefore \sqrt{z} = \sqrt{\rho} \cdot \left(\cos\frac{\alpha}{2} + j\sin\frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{\rho} \cdot \left[\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 + \cos\alpha)} + j\sqrt{\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos\alpha)} \right]$$

$$\text{Operando resulta: } \sqrt{z} = \sqrt{\frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} \cdot \cos\alpha} + j\sqrt{\frac{\rho}{2} - \frac{\rho}{2} \cdot \cos\alpha}$$

$$\text{Pero - como - } \rho \cdot \cos\alpha = a; - y - \rho \cdot \sin\alpha = b - y - \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Resulta:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} + \frac{a}{2}} + j\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2} - \frac{a}{2}}$$

Expresión para calcular la raíz de un complejo en forma binómica.

Aplicando la anterior para calcular γ y separando en la parte real e imaginaria, tendremos:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{(r \cdot g - x \cdot b)^2 + (r \cdot b + x \cdot g)^2} \cdot r \cdot g - x \cdot b}{2}}$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{r^2 \cdot g^2 - 2r \cdot g \cdot x \cdot b + x^2 \cdot b^2 + r^2 \cdot b^2 + 2r \cdot b \cdot x \cdot g + x^2 \cdot g^2 + r \cdot g - x \cdot b} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{rg}}{\sqrt{2}} \cdot \left[\sqrt{1 + \left(\frac{xb}{rg}\right)^2 + \left(\frac{b}{g}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2} + 1 - \frac{xb}{rg} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{rg}{2}} \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{r^2}\right) \cdot \left(1 + \frac{b^2}{g^2}\right)} + 1 - \frac{xb}{rg} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Si } \omega \rightarrow 0 \Rightarrow 0 - \alpha = \frac{\sqrt{rg}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{r \cdot g} = \alpha_{\min}$$

En igual forma si hacemos:

$\omega \rightarrow \infty$, operando con las expresiones anteriores

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{r^2 \cdot g^2 + x^2 \cdot g^2 + b^2 \cdot r^2 + x^2 \cdot b^2} + (rg - xb) \right]$$

Factoreando por grupos:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\omega^4 L^2 C^2 \cdot \left(\frac{r^2 g^2}{\omega^4 L^2 C^2} + \frac{g^2}{\omega^2 C^2} + \frac{r^2}{\omega^2 L^2} + 1 \right)} + \omega^2 LC \cdot \left(\frac{rg}{\omega^2 LC} - 1 \right) \right]$$

Factoreando nuevamente:

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \omega^2 LC \cdot \left[\sqrt{\left(1 + \frac{r^2}{\omega^2 L^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{g^2}{\omega^2 C^2} \right)} + \left(\frac{rg}{\omega^2 LC} - 1 \right) \right]$$

A continuación desarrollaremos en series de Newton los dos factores que están debajo de la raíz de la última expresión y tomaremos los dos primeros términos por cuanto el segundo ya resulta muy pequeño comparado con el primero.

$$(a+b)^n = a^n + n \cdot a^{n-1} \cdot b + \frac{1}{2!} n \cdot (n-1) \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \frac{1}{3!} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot a^{n-3} \cdot b^3 + \dots$$

$$\sqrt{1 + \frac{r^2}{\omega^2 \cdot L^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\omega^2 \cdot L^2} + \dots$$

$$\sqrt{1 + \frac{g^2}{\omega^2 \cdot C^2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{g^2}{\omega^2 \cdot C^2} + \dots$$

Remplazando los dos términos hallados en la expresión de α^2 , resulta:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 LC \cdot \left[\left(1 + \frac{r^2}{2\omega^2 L^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{g^2}{2\omega^2 C^2} + \frac{r \cdot g}{\omega^2 LC} - 1 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 LC \cdot \left[1 + \frac{g^2}{2\omega^2 C^2} + \frac{r^2}{2\omega^2 L^2} + \frac{r^2 g^2}{4\omega^4 L^2 C^2} + \left(\frac{r \cdot g}{\omega^2 LC} - 1 \right) \right] \end{aligned}$$

Para frecuencias elevadas el término conteniendo ω a la cuarta potencia en el denominador puede ser despreciado, resultando:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \frac{1}{2} \omega^2 L \cdot C \cdot \left(1 + \frac{g^2}{2\omega^2 C^2} + \frac{r^2}{2\omega^2 L^2} + \frac{r \cdot g}{\omega^2 LC} - 1 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \omega^2 LC \cdot \left(\frac{g^2}{\omega^2 C^2} + \frac{2r \cdot g}{\omega^2 LC} + \frac{r^2}{\omega^2 L^2} \right) = \frac{1}{4} \omega^2 LC \cdot \left(\frac{g}{\omega C} + \frac{r}{\omega L} \right)^2 \end{aligned}$$

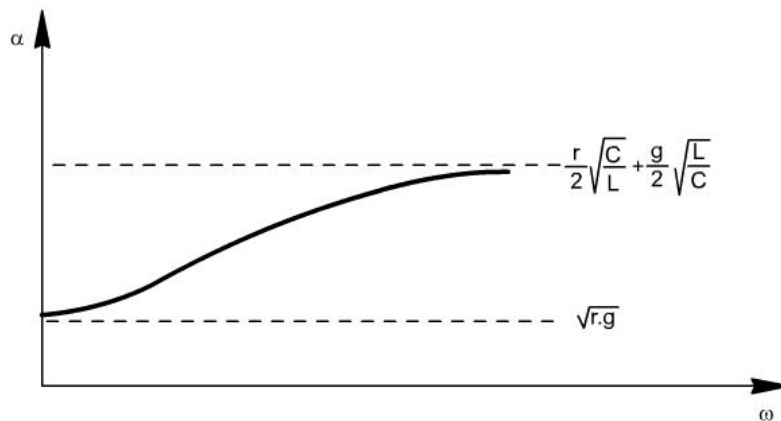
$$\therefore \alpha = \frac{1}{2} \omega \sqrt{LC} \cdot \left(\frac{g}{\omega C} + \frac{r}{\omega L} \right) = \frac{r}{2} \frac{\sqrt{LC}}{L} + \frac{g}{2} \frac{\sqrt{LC}}{C} = \frac{r}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{g}{2} \sqrt{\frac{L}{C}} = \alpha_{\max} = \alpha_C + \alpha_d$$

Donde :

α_C = Amortiguamiento debido a las pérdidas en los conductores

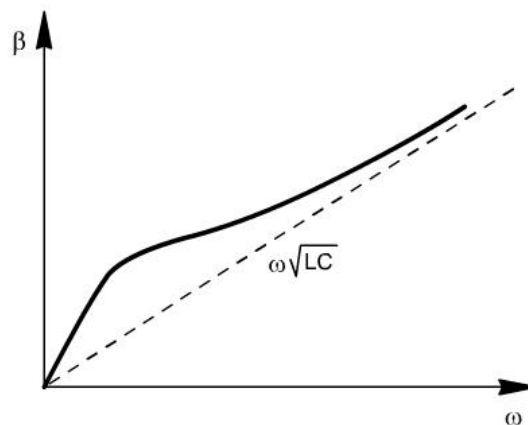
α_d = Amortiguamiento debido a las pérdidas en el dieléctrico que separa a los conductores.

En síntesis, la constante de amortiguamiento se mueve entre los límites que indica el siguiente gráfico.



Veamos ahora la constante de fase β .

Un análisis similar a realizado con la constante α nos permitiría obtener un gráfico similar al anterior para la constante β , donde podremos observar la tendencia de β en función de ω .

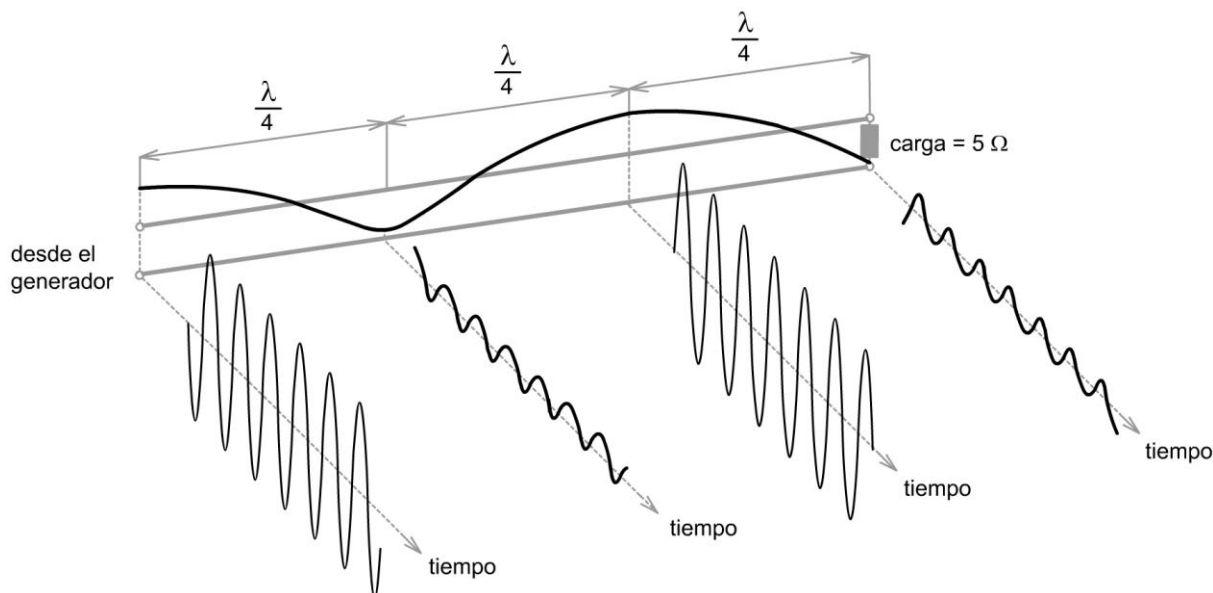


En resumen: Cuando la línea no tiene pérdidas $\alpha = 0$ (Caso de la línea ideal), o cuando $\omega L \gg R$ y $\omega C \gg G$ lo cual es cierto para líneas de alta frecuencia o líneas de bajas pérdidas.

Vemos pues que en alta frecuencia la velocidad de propagación es similar al caso de una línea de bajas pérdidas.

Anexo 2**ROE: Relación de onda estacionaria**

Si bien este concepto es de interés en las líneas de transmisión de comunicaciones, lo analizaremos brevemente para dejar en claro algunos conceptos estudiados en la teoría de las líneas largas.



La figura nos muestra una línea larga de $\frac{3}{4}$ de longitud de onda, donde podemos observar que las tensiones o corrientes dependen de dos variables; una es el tiempo y la otra es la distancia. Es decir en cada punto de nuestra línea larga la tensión o corriente alcanzarán un valor máximo que depende de la distancia al punto de referencia que tomemos (Por ejemplo el extremo receptor), pero además variará en función del tiempo.

Si consideramos la variable distancia solamente y representamos los valores picos de las tensiones en cada punto, aparece una onda parecida a la de un rectificador de onda completa, en la cual puede observarse que habrá lugares donde las tensiones picos son mínimas (Nodos) y otros donde son máximas (vientres). **A esta onda se la denomina estacionaria.**

La relación de onda estacionaria (ROE) se define matemáticamente como el cociente entre el valor pico de la tensión o corriente en la ubicación de la línea donde este valor es máximo y el valor pico de la tensión o corriente en la ubicación de la línea donde este valor es mínimo.

ROE = Valor pico máximo de tensión/valor pico mínimo de tensión.

Se demuestra que la ROE también es igual a la relación o cociente entre la impedancia característica de la línea y la impedancia de carga.

$$ROE = \frac{Z_0}{Z_c}$$

Por lo tanto la ROE será un número que en el caso de un corto circuito valdrá infinito y para una impedancia de carga distinta de cero tendrá un valor finito.

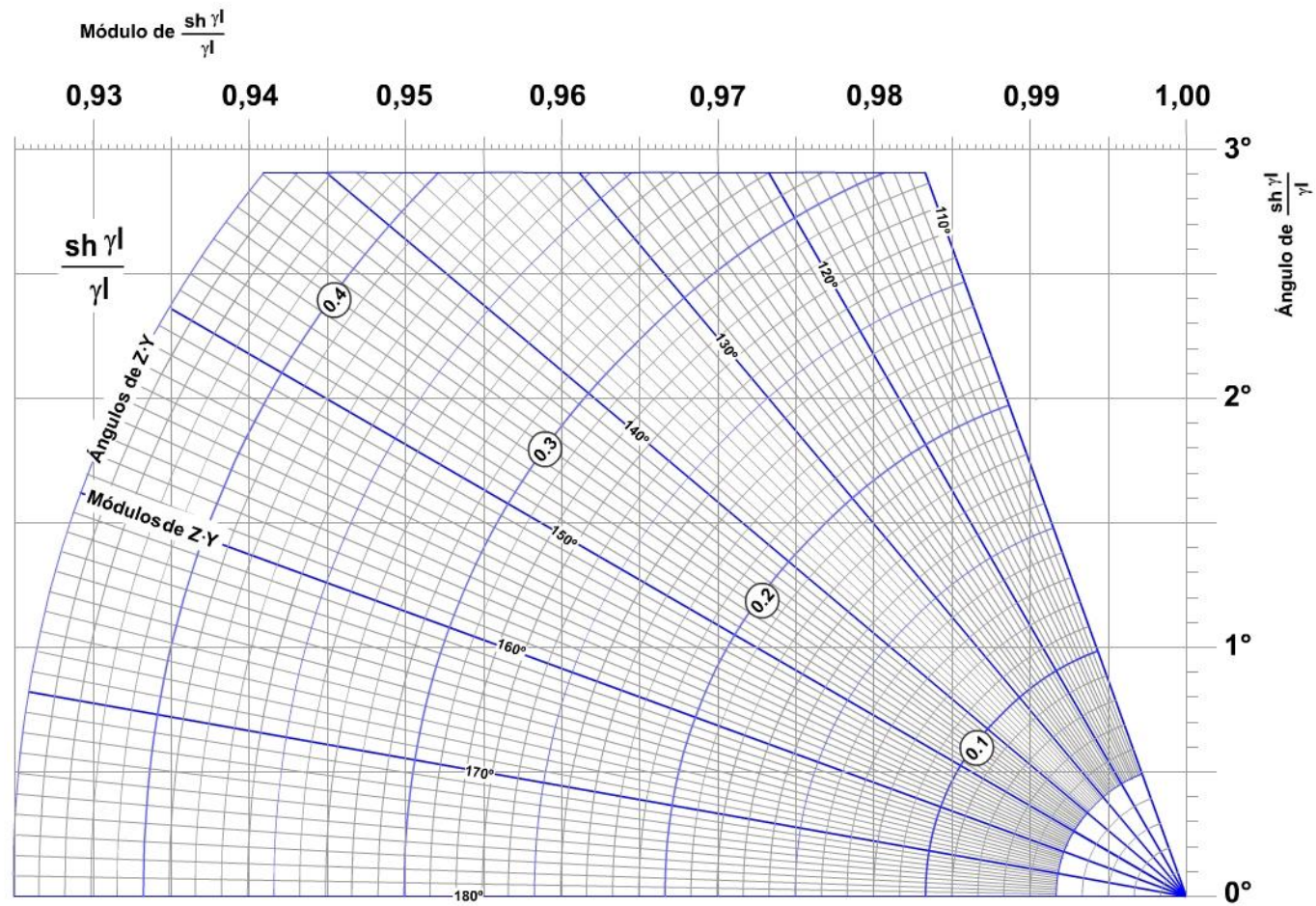
También podría valer menos de uno (Si $Z_0 < Z_c$); en este caso se invierten los operandos y se toma el valor mayor que 1.

Conceptualmente la ROE nos indica con su valor si estamos transmitiendo más o menos de la potencia natural de la línea. O en otras palabras si la carga esta próxima o no a la impedancia característica (Recordemos que el máximo rendimiento se obtiene cuando la carga es igual a la impedancia característica de la línea).

De cualquier manera este concepto es de utilidad en líneas resonantes es decir aquellas cuya longitud es igual o mayor que un cuarto de longitud de onda, es a partir de allí donde podremos establecer la mencionada relación de máximos de tensión o corriente.

En el ámbito de las comunicaciones la ROE es un indicador de la potencia irradiada en relación con la potencia entregada por el transmisor y de allí su interés en medirlo.

Gráficos de Wudruff - Seno



Gráficos de Wudruff - Tangente

